

Exercice 1

Pour tout entier n , on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable X , à coefficients réels, de degré $\leq n$, muni de la norme $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{3n}[X]$ et $\varphi: E \rightarrow F$ l'application $\varphi(P) = P^3$.

1. Montrer que φ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle $D_\varphi(P)$ en tout point P de E . Vérifier que φ est de classe C^1 sur E .
2. On fait $n = 1$. Donner l'expression de la matrice de $D_\varphi(P)$ dans les bases canoniques de E et de F .

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle telles que $f'(1)$ et $g'(1)$ existent.

1. Montrer que $h(x, y) = f(xy) + g(\frac{x}{y})$ est différentiable en $(1, 1)$.

2. Calculer $\frac{\partial h}{\partial y}(1, 1)$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(1, 1)$

Exercice 3

Soient E, F_1, F_2 et G des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E , $f: U \rightarrow F_1$ et $g: U \rightarrow F_2$ deux applications.

Soient $b: F_1 \times F_2 \rightarrow G$ une application bilinéaire continue et $p: U \rightarrow G$ une application définie, pour tout $x \in U$, par $p(x) = b(f(x), g(x))$.

On suppose que f et g sont différentiables au point $a \in U$.

Montrer que l'application p est différentiable au point a et déterminer $d_p(a)$.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel normé, U un ouvert de E , a un point de U , f et g deux applications de U dans $\mathbb{R}$ différentiables au point a .

On suppose que g ne s'annule pas sur U et on définit l'application $q: U \rightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in U$, $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Montrer que q est différentiable au point a et déterminer sa différentielle $d_q(a)$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Montrer que l'application $N: x \in E \mapsto N(x) = \|x\|$ n'est pas différentiable en 0_E .
On suppose E muni d'un produit scalaire de norme associée N .
2. Montrer que l'application N est différentiable en tout point $x \neq 0_E$ et déterminer $N'(x)$.

3. En déduire que l'application $\varphi : x \in E \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ est différentiable sur $E - \{0_E\}$ et préciser $\varphi'(x)$ pour tout $x \neq 0_E$.

Exercice 6

Soit $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ une norme et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = (N(x))^2$$

1. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.
2. Montrer que f est différentiable en 0 et donner sa différentielle $D_0 f$.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f admet en $(0, 0)$ une dérivée suivant tout vecteur.
2. f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 8

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme canonique euclidienne $\|\cdot\|$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xye^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1. Montrer que f est différentiable $(0, 0)$ et calculer $Df(0, 0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer $Df(x, y)(a, b)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
4. On note $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$.

(a) Montrer que pour tout $(x, y) \in B$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq |y|e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq |x|e^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(b) Montrer que pour tout $(x, y) \in B$, on a

$$|Df(x, y)(a, b)| \leq e^{-1} \|(a, b)\|, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Indication: utiliser l'inégalité $te^{-t} \leq e^{-1}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(c) En déduire que

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leq e^{-1} \|(x, y) - (x', y')\|, \quad \forall (x, y), (x', y') \in B.$$

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.
2. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{\|(x, y)\|_2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.
2. Si f est différentiable en $(0, 0)$, (déduire de la question précédente) quel serait sa différentielle?
3. Montrer f est différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 11

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et f une fonction de E dans E qui vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(tx) = t^2 f(x).$$

1. Montrer que si f est différentiable en 0, on a alors $Df(0) = 0$.
2. On suppose que f est bornée sur la sphère unité $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$. Montrer que f est différentiable en 0.

Exercice 12

Soit $E = C([0, 1])$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$ muni de la norme de la convergence uniforme:

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|, f \in E.$$

1. Montrer que les applications suivantes sont différentiables et calculer leurs différentielles:

(a) $\varphi_1 : E \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_1(f) = \sin(f(0)), \forall f \in E.$

(b) $\varphi_2 : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_2(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \forall (f, g) \in E \times E.$

2. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f \in E, \varphi(f) = \int_0^1 \sin(f(t))dt.$$

- (a) Soit $f \in E$. Montrer que l'application $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall h \in E, L(h) = \int_0^1 h(t) \cos(f(t))dt$$

est linéaire continue.

- (b) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|\sin(x+y) - \sin(x) - y \cos(x)| \leq y^2.$$

- (c) Montrer que φ est différentiable sur E et calculer $D\varphi(f)h$, pour tout $(f, h) \in E \times E$.